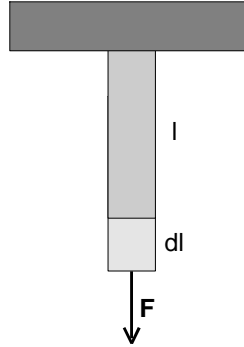


## SPRĘŻYSTOŚĆ

Wszystkie ciała wykazują charakterystyczny zakres odkształcenia, zwany sprężystością. Jeśli rozciągamy pręt (w kierunku osi  $x_1$ ), to relację między przyłożonym naprężeniem  $\sigma_{11}$  i uzyskanym względnym wydłużeniem ciała  $\epsilon_{11}$  opisuje słynne prawo Hooke'a:



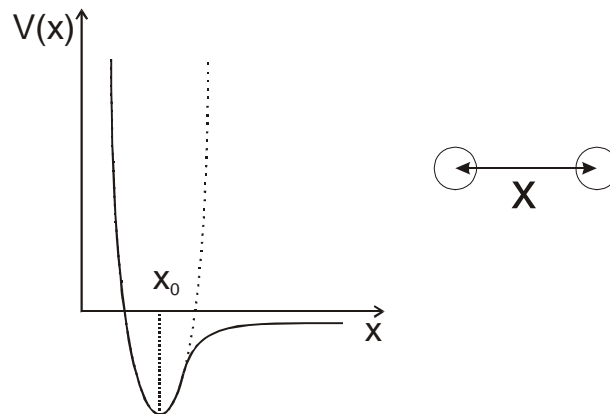
*Prawo Hooke'a w jednym wymiarze (klasyczny test rozciągania)*

$$\sigma_{11} = E\epsilon_{11} \quad (1)$$

gdzie E jest modułem Younga,  $\sigma_{11}=F/S$  (S jest przekrojem poprzecznym pręta), zaś  $\epsilon_{11}=dl/l$ .

### Skąd się w bierze sprężystość ciał ?

Spójność ciał stałych zapewniają wiązania: jonowe, metaliczne, kowalencyjne, polaryzacyjne (Van der Walsa) i wodorowe.



*Potencjał między dwoma atomami. Linia przerywaną pokazano, że w położeniu równowagi (minimum potencjału), kształt potencjału może być przybliżony przez parabolę.*

Prawa sprężystości wyprowadzić można z oddziaływań atomowych. Rozpatrzmy zagadnienie w jednym wymiarze (wzdłuż osi  $x$ ). Wprowadźmy zmienną  $u$ , opisującą wychylenie atomu z położenia równowagi:

$$\begin{aligned} u &= x - x_0 \\ \text{lub} \quad x &= x_0 + u \end{aligned}$$

gdzie  $x$  jest aktualnym położeniem atomu, zaś  $x_0$  – jego położeniem równowagi.

Rozkładamy potencjał w szereg Taylora:

$$V(x) = V(x_0) + u \left( \frac{dV}{dx} \right)_{x_0} + \frac{u^2}{2!} \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x_0} + \dots \quad (2)$$

Tylko te trzy składniki rozwinięcia są dla nas istotne, dalsze jako zaniechane – pomijamy.

W punkcie równowagi ( $x=x_0$ ) zachodzi:  $\left( \frac{dV}{dx} \right)_{x_0} = 0$ . A zatem:

$$V(x) = V(x_0) + \frac{u^2}{2} \left( \frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x_0} \quad (3)$$

Pamiętając, że:  $x=x_0+u$ , powyższą relację możemy napisać:

$$V(u) = A + \frac{u^2}{2} B \quad (4)$$

gdzie A i B są stałymi.

Jeśli atom zostaje wychylony z położenia równowagi, to działa na niego siła F:

$$F = -\frac{dV(u)}{du} \quad \Rightarrow \quad F = -uB = -ku \quad (5)$$

gdzie  $k=B$  możemy zidentyfikować jako stałą sprężystości. A zatem odnajdujemy typową relację, która opisuje rozciąganie sprężyny:

$$F = -ku \quad (6)$$

Jeżeli to my rozciągamy ciało (np. pręt), to przykładana siła wynosi:  $F = ku$ . Normalizując siłę i wydłużenie:  $F/S = k' u/L$  (gdzie S jest przekrojem poprzecznym, L – długością początkową pręta), odnajdujemy klasyczne prawo Hooke'a (Równ.1) dla jednego wymiaru:  $\sigma_{11} = E \epsilon_{11}$ , gdzie  $E=k'$  jest modułem Younga.

## Przypadek ogólny - trójwymiarowy

W przypadku ogólnym, interesują nas jednak wszystkie składowe przyłożonych naprężeń i również wszystkie składowe odkształcenia (wywołane przez przyłożone naprężenia). Sytuację taką opisuje trójwymiarowe prawo Hooke'a, które jest relacją pomiędzy tensorami:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (7a)$$

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (7b)$$

Wielkości  $S_{ijkl}$  i  $C_{ijkl}$  są tensorami czwartego rzędu (mają cztery wskaźniki).

$C_{ijkl}$  jest tensorem sztywności (ang.: stiffness), zaś  $S_{ijkl}$  – tensorem podatności sprężystej (ang.: susceptibility). W relacji powyższej zastosowano oczywiście konwencję sumowania po powtarzających się wskaźnikach (np., po prawej stronie Równ. 7a występuje 9 składowych tensora odkształcenia; ponadto równanie to przedstawia 9 równań na poszczególne składowe tensora naprężenia). Trzeba zwrócić uwagę, że Równ. 7a i 7b nie są po prostu swoimi odwrotnościami. Równania te opisują inne sytuacje eksperymentalne. Równ. 7a opisuje sytuację, gdy czynnikiem wymuszającym są odkształcenia ( $\epsilon_{ij}$ ), a odpowiedzią materiału są

naprężenia wytworzone w materiale ( $\sigma_{ij}$ ). Natomiast Równ. 7b opisuje sytuację odwrotną: do materiału przykładamy zestaw naprężeń ( $\sigma_{ij}$ ), a odpowiedzią jest odkształcenie materiału ( $\epsilon_{ij}$ ). Omówmy teraz kilka własności symetrii tensorów  $S$  i  $C$ .

### Symetrie tensorów sprężystości

Rozważymy w tym celu kilka sytuacji doświadczalnych.

a) Przykładamy tylko jedną składową naprężenia:  $\sigma_{11}$ . Ile wynoszą  $\epsilon_{23}$  i  $\epsilon_{32}$ ?  
Stosujemy Równ. 7b:

$$\epsilon_{23} = S_{2311}\sigma_{11}$$

$$\epsilon_{32} = S_{3211}\sigma_{11}$$

lecz:  $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} \Rightarrow S_{3211} = S_{2311}$

i ogólnie:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} \quad (8)$$

b) przykładamy składową naprężenie  $\sigma_{32}=\sigma_{23}$ , ile wynosi  $\epsilon_{12}$ ?

Stosując ponownie Równ. 7b:

$$\epsilon_{12} = S_{1223}\sigma_{23} + S_{1232}\sigma_{32} = \sigma_{32}(S_{1223} + S_{1232})$$

Składowych  $S_{1223}$  i  $S_{1232}$  nie możemy wyznaczyć oddzielnie, lecz tylko ich sumę. Przyjmuje się zatem konwencję, że wartość powyższego nawiasu dzielimy równo pomiędzy te składowe tensora  $S$ ; a zatem:

$$S_{ijkl} = S_{ijlk} \quad (9)$$

Tak więc istnieje symetria ze względu na przestawienie wskaźników w pierwszej parze, a także w drugiej.

c) Istnieje jeszcze jedna symetria tensorów  $S$  i  $C$ , polegająca na przestawieniu obu par wskaźników:

$$S_{ijkl} = S_{klij} \quad (10)$$

Symetrię tą można wykazać w oparciu o rozważania energetyczne.

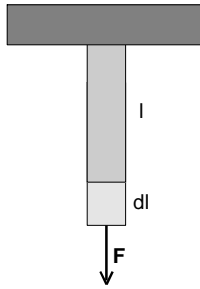
Zapamiętajmy także, iż:

**WSZYSTKIE POWYŻSZE SYMETRIE WYKAZUJE TAKŻE TENSOR  $C_{ijkl}$  !!**

d) Na ogół  $S_{ijkl} \neq \frac{1}{C_{ijkl}}$

Jest tak, ponieważ obie stałe opisują różne eksperymenty.

Rozważmy test rozciągania osiowego:



Czynnikiem „wymuszającym” jest tu składowa naprężenia:  $\sigma_{11}=F/S$ , zaś mierzoną „odpowiedzią” materiału jest wydłużenie względne  $\varepsilon_{11}$ ; związek między nimi jest następujący:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11} \quad (11)$$

Z drugiej strony wiemy, że:  $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ ; ostatecznie:

$$E = \frac{1}{S_{1111}} \quad (12)$$

Trzeba tu dodać, że choć mierzymy składową  $\varepsilon_{11}$ , to w materiale wystąpiły i inne składowe odkształcenia (np.  $\varepsilon_{22}$  i  $\varepsilon_{33}$ ).

Natomiast stała  $C_{1111}$  opisuje inny eksperyment: wymuszamy na próbce wydłużenie względne  $\varepsilon_{11}$  (i tylko tę składową, inne składowe mają być zerowe !) i pytamy ile wynosi składowa naprężenia  $\sigma_{11}$ , która wyindukowała się w materiale (wystąpią i inne składowe  $\sigma_{ij}$ ). Oczywiście:

$$S_{1111} \neq \frac{1}{C_{1111}} \quad (13)$$

### Sprężystość liniowa i nieliniowa

Widzieliśmy powyżej, że liniowy charakter sprężystości wynika z przybliżenia dołka potencjału międzyatomowego przez funkcję drugiego stopnia (parabolę). Przybliżenie to jest dobrze spełnione dla małych wychyleń atomu z położenia równowagi. Natomiast dla większych wychyleń, ale jeszcze odwracalnych – mamy sprężystość nieliniową. Efekt ten dobrze widać na krzywej rozciągania wiskersów, zamieszczonej na końcu Rozdziału: „Naprężenia i odkształcenia”. My zajmować się będziemy tutaj wyłącznie sprężystością liniową.

### Transformacja tensorów C i S do nowego układu odniesienia.

Ponieważ stałe sprężyste są tensorami czwartego rzędu, to ich wzory transformacyjne zawierają iloczyny czterech kosinusów kierunkowych:

$$\begin{aligned} S'_{ijkl} &= a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} \cdot S_{mnop} \\ C'_{ijkl} &= a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} \cdot C_{mnop} \end{aligned} \quad (14)$$

W równaniach tych zastosowana jest konwencja sumowania po powtarzających się wskaźnikach. Po prawej stronie, np., pierwszego z równań występuje 81 składowych tensora S ze starego układu odniesienia; ponadto równanie to przedstawia 81 równań na poszczególne składowe tensora S' w nowym układzie odniesienia.

## Notacja macierzowa

Tensory C i S posiadają po 81 składowych. Ze względu na przedstawione powyżej symetrie, ilość niezależnych składowych jest dużo mniejsza. Jest to powód dla którego używa się zredukowanej notacji zapisu tensorów S i C, zwanej notacją macierzową. Poza tym jest rzeczą wygodną operować dwuwymiarową macierzą, którą możemy w sposób przejrzysty przedstawić na kartce papieru. Biorąc pod uwagę, że jest sześć niezależnych składowych tensorów odkształcenia i naprężeń, tensory S i C przedstawia się jako macierze o wymiarach (6x6). Istotą tego skróconego zapisu jest zastępowanie pary wskaźników – jednym, zgodnie z następującą regułą:

stare wskaźniki	nowe wskaźniki
	11 → 1
	22 → 2
	33 → 3
	23, 32 → 4
	13, 31 → 5
	12, 21 → 6

(15)

Rozpocznijmy od tensora  $\sigma_{ij}$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Zamieniając tensor  $\varepsilon_{ij}$  na macierz kolumnową, używamy dodatkowo współczynników „2” przy składowych ścinających (czynnik ten uwzględnia fakt, że istnieją zawsze dwie, równe sobie składowe ścinające odkształcenia; a zatem przykładowo:  $\varepsilon_6=2\varepsilon_{12}$ , gdyż  $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}$ ). Schemat zamiany tensora  $\varepsilon_{ij}$  na macierz kolumnową podany jest poniżej:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Tensor  $C_{ijkl}$  zamieniamy na macierz kwadratową zgodnie z regułami podanymi w tabelce (Równ. 15):

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{mn} \quad (18)$$

Ostatecznie prawo Hooke’a (Równ. 7a) możemy zapisać w postaci macierzowej:

**Prawo Hooke'a:**

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (19)$$

lub też w postaci rozwiniętej:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Chcielibyśmy mieć ten zapis również i w drugą stronę, tzn.  $\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j$ . Konsekwencją Równ. (17) oraz faktu, że również w tensorze odkształcenia są pary równych sobie składowych ścinających (np.  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ), zamiana  $S_{ijkl} \rightarrow S_{mn}$  jest nieco bardziej złożona (niż tensora C). Przy redukcji tensora S do macierzy stosujemy następujący algorytm:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= p_{mn} S_{ijkl} \\ ij &\rightarrow m \\ kl &\rightarrow n \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie redukcja wskaźników jest dana Równ.15, zaś czynnik  $p_{mn}$  ma następujące wartości:

$p_{mn}=1$  dla  $m, n \leq 3$

$p_{mn}=4$  dla  $m, n > 3$

$p_{mn}=2$  dla pozostałych przypadków ( $m > 3, n \leq 3$  oraz  $n > 3, m \leq 3$ ).

Poniżej pokazano schematycznie, jakie wartości przyporządkowujemy poszczególnym wyrazom macierzy  $p_{mn}$ :

$$P_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Ostatecznie możemy zapisać prawo Hooke'a w postaci macierzowej, przy użyciu macierzy S:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (23)$$

lub też w postaci rozwiniętej:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (24)$$

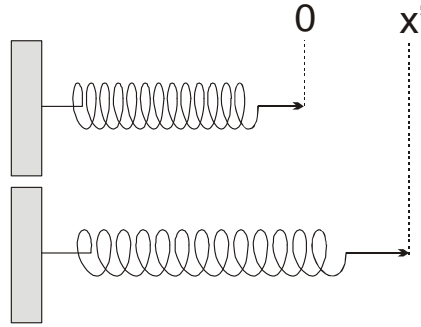
Zbierzmy, raz jeszcze uzyskane relacje macierzowe:

$$[\varepsilon] = [S] \cdot [\sigma] \quad \text{oraz} \quad [\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon] \quad (25)$$

zatem:  $[C] \cdot [S] = I$

## Energia zgromadzona w materiale odkształconym sprężysto

❖ dla sprężyny:



Rozciągamy sprężynę na odległość  $x'$  (od położenia równowagi). Przykładana siła przy wychyleniu  $x$  wynosi:  $F=kx$

Praca rozciągnięcia sprężyny na odległość  $x'$  wynosi:

$$W = \int_0^{x'} F(x) dx$$

$$W = \int_0^{x'} kx dx = \frac{1}{2} kx'^2 \quad (26)$$

$$W = \frac{1}{2} F(x') x'$$

Czyli ogólniej:

$$W = \frac{1}{2} F(x) \cdot x \quad (26 a)$$

❖ w przypadku odkształcenia 3-wymiarowego:

Rozważmy odkształcenie jednostkowego sześcianu danego materiału. W analogii do Równ. 26 a, całkowita praca odkształcenia sześcianu jest sumą prac związanych z poszczególnymi składowymi odkształcenia ( $\varepsilon_j$ ), a zatem:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_j \varepsilon_j \quad (27)$$

Powyższa praca jest jednocześnie energią sprężystą zgromadzoną w jednostkowej objętości materiału (czyli energią właściwą).

Równanie powyższe można wyrazić w kilku równoważnych postaciach:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_j \varepsilon_j = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

lub :

$$W = \frac{1}{2} C_{klmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} S_{klmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn}$$

Wyrażenia powyższe dotyczą energii właściwej (czyli energii na jednostkę objętości). Jeśli liczymy energię sprężystą całego ciała, musimy policzyć całkę po jego objętości:

$$W_0 = \int_{V_0} W(x, y, z) dV$$

gdzie  $V_0$  jest całkowitą objętością ciała.

## WPLYW SYMETRII NA STAŁE SPRĘŻYSTE

Symetria ciała (kryształu) wpływa na kształt macierzy stałych sprężystych  $S$  i  $C$ .

Na początku zauważmy, że macierze  $S$  i  $C$  są symetryczne, tzn:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= C_{ji} \\ S_{ij} &= S_{ji} \end{aligned}$$

Wynik ten można dostać przy okazji rozważań dotyczących pracy odkształcenia sprężystego ciała. Również symetria ciała wywiera przemożny wpływ na kształt macierzy  $S$  i  $C$ . Poniżej podamy macierze  $C$  i  $S$  dla trzech przypadków symetrii ciał (kryształów): sześcienniej, rombowej i izotropowej.

### Symetria sześcienna:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

Występują tutaj trzy różne współczynniki  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$ , które definiują 12 niezerowych wyrazów tej macierzy.

Oczywiście kształt macierzy  $S$  jest identyczny.

### Symetria rombowa

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$



Występuje tutaj 9 niezależnych współczynników, które definiują 12 niezerowych wyrazów macierzy.

Kształt macierzy S jest identyczny.

Zauważmy, że im niższa symetria ciała tym więcej będzie niezależnych współczynników, definiujących macierz sprężystości. W przypadku ciała o najniższej możliwej symetrii, czyli kryształu trójskośnego, niezależnych współczynników będzie 21.

### **Materiał izotropowy**

Przykładem materiału izotropowego może być ciało o strukturze amorficznej (szkło, zastygła smoła itp.), ale także polikryształ bez tekstury (jest to tzw. ciało quasi-izotropowe).

Łatwo można wykazać, że w przypadku ciała izotropowego tylko dwie niezależne stałe  $\lambda$  i  $\mu$  (stałe Lamé'go) definiują całą macierz sprężystości. I tak:

$$C_{12}=\lambda, C_{44}=\mu \text{ oraz } C_{11}=\lambda+2\mu.$$

Macierze S i C mają następującą postać:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

gdzie:

$$S_{11} = \frac{\mu + \lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

$$S_{12} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

$$2(S_{11} - S_{12}) = \frac{1}{\mu}$$

### **Przykłady zastosowań:**

#### **a) materiał izotropowy pod obciążeniem osiowym:**

Rozciągamy materiał w kierunku osi  $x_1$ . Relacja łącząca  $\sigma_1$  i  $\epsilon_1$  jest następująca:

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{S_{11}}\varepsilon_1$$

czyli:

$$E = \frac{1}{S_{11}} \quad (35)$$

Obok wydłużenia, w kierunku  $x_1$ , wystąpią też skrócenia poprzeczne:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = S_{12}\sigma_1 \quad (36)$$

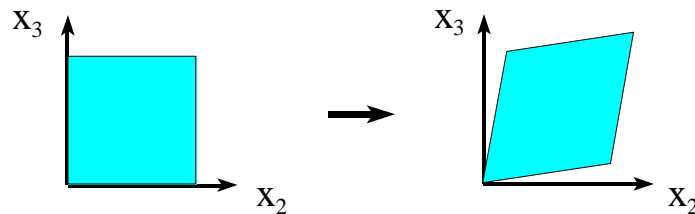
Interesujący jest stosunek obu skrócenia poprzecznego do wydłużenia; podaje go współczynnik Poissona ( $\nu$ ):

$$-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \nu \quad (37)$$

W świetle relacji podanych wyżej:

$$\nu = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (38)$$

#### b) ścinanie ciała izotropowego:



*Zmiana kształtu ciała pod wpływem odkształcenia typu ścinającego*

Założmy, że przykładamy naprężenie ścinające  $\sigma_{23}=\sigma_{32}=\sigma_4$  (pozostałe składowe są zerowe). Korzystając z Równ. 24 i 34:

$$\varepsilon_4 = S_{44}\sigma_4 = 2(S_{11} - S_{12})\sigma_4 \quad (39)$$

Z drugiej strony, z klasycznej postaci prawa Hooke'a

$$\sigma_4 = G\varepsilon_4 \quad (40)$$

Po porównaniu otrzymujemy następujące wyrażenie na moduł ścinania  $G=\mu$ :

$$G = \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})} = \mu \quad (41)$$

Różne wprowadzone już przez nas stałe sprężystości dla ciała izotropowego nie są od siebie niezależne. I tak, wiedząc, że:

$$E = \frac{1}{S_{11}} \quad \text{oraz} \quad \nu = -\frac{S_{12}}{S_{11}}$$

otrzymujemy:

$$G = \frac{1}{2\left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E}\right)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (42)$$

### c) odkształcenie materiału izotropowego pod wpływem naprężeń hydrostatycznych

Jest to stan naprężeń, w którym występują tylko składowe normalne o takiej samej wartości  $p$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_3 = p \\ \sigma_4 &= \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Taki stan naprężeń panuje np. w cieczy (na stałej wysokości).  
Stosując uogólnione prawo Hooke'a:

$$[\varepsilon] = [S] \cdot [\sigma]$$

dla ośrodka izotropowego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= pS_{11} + 2pS_{12} = p(S_{11} + 2S_{12}) \\ \varepsilon_2 &= pS_{11} + 2pS_{12} = p(S_{11} + 2S_{12}) \\ \varepsilon_3 &= pS_{11} + 2pS_{12} = p(S_{11} + 2S_{12}) \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Względna zmiana objętości, czyli dylatacja  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3p(S_{11} + 2S_{12}) \quad (45)$$

A zatem moduł sprężystości objętościowej,  $K$ , wynosi:

$$K = \frac{p}{\Delta} = \frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{p}{3p(S_{11} + 2S_{12})} = \frac{1}{3(S_{11} + 2S_{12})} \quad (46)$$

Ostatecznie:

$$K = [3(S_{11} + 2S_{12})]^{-1} \quad (47)$$

Moduł sprężystości objętościowej  $K$  możemy wyrazić również przez  $E$  i  $\nu$  (korzystając z Równ. (35) i (38)):

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (48)$$

#### Wartości współczynnika Poissona

Wykorzystując Równ. (42) i (48) obliczmy wyrażenie:

$$\frac{K}{G} = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (49)$$

Wyliczmy stąd  $\nu$ :

$$\nu = \frac{3\frac{K}{G} - 2}{6\frac{K}{G} + 2} \quad (50)$$

Na podstawie tej zależności znajdziemy granice w jakich może się zmieniać  $\nu$ .

Gdyby  $\frac{K}{G} \rightarrow 0 \Rightarrow \nu = -1$       zatem zakres dopuszczalny wynosi:  $-1 < \nu < 0.5$       (51)

$\frac{K}{G} \rightarrow \infty \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}$

Przykładowe wartości dla materiałów:

piryt żelaza  $\text{FeS}_2$ :  $\nu = -0.4$

$\text{Ni}_3\text{Al}$ ,  $\text{C}_3\text{N}_4$ :  $\nu < 0$  (związki te to tzw. auksetyki)

Cr:  $\nu$  - bardzo małe wartości ujemne

Be:  $\nu = 0$

metale polikrystaliczne:  $\nu \cong \frac{1}{3}$

guma:  $\nu \cong \frac{1}{2}$

Na koniec zobaczymy, jakie są typowe wartości stałych sprężystości. Współczynnik Poissona jest bezwymiarowy, natomiast pozostałe stałe wyrażone zostały w GPa ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ):

Materiał	E	K	G	$\nu$	Granica Wytrzymałości
Aluminium	70	73	27	0.34	0.1
Stal (Fe- $\alpha$ )	208	166	81	0.29	1.3
Mosiądz	98-112	40	26 – 36	0.3 – 0.4	0.3 – 0.5
Ołów	16	41	5.6	0.44	0.015
Duraluminium	70	200	26	0.31	0.4
Miedź	123	137	46	0.34	
Sód	8.9	8.2	3.4	0.32	

W tabelce tej podano również dla kilku metali tzw. granicę wytrzymałości. Jest to maksymalna wartość naprężenia normalnego jakiemu może być poddana próbka; powyżej niego próbka ulega przewężeniu, a następnie zerwaniu.

### Anizotropia sprężysta

Często jako wskaźnika anizotropii sprężystości ciał (kryształów) używa się **współczynnika Zenera**:

$$A = \frac{2(S_{11} - S_{12})}{S_{44}} = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}}$$

Łatwo sprawdzić, że dla ciała izotropowego:  $A=1$ .