

# ODKSZTAŁCENIE PLASTYCZNE MATERIAŁÓW IZOTROPOWYCH.

## Opis dla ośrodka ciągłego

(opracowano na podstawie:

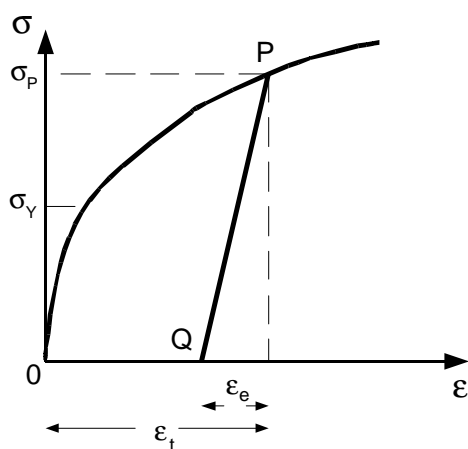
C.N. Reid, *deformation geometry for Materials Scientists*, Pergamon Press, Oxford, 1973)

### Wstęp

Omówimy teraz sposób opisu odkształcenia plastycznego, traktując materiał jako ośrodek ciągły i izotropowy. Metale używane w praktyce przemysłowej mają prawie zawsze strukturę polikrystaliczną. Jeśli ich rozkład orientacji (tekstura) jest bliski przypadkowemu, a ponadto rozmiar ziaren nie przekracza 0.1 mm – to mogą być one traktowane izotropowe. Oczywiście w opisie takim nie bierzemy pod uwagę krystalicznego charakteru mechanizmów odkształcenia plastycznego, jak poślizg czy bliźniakowanie.

Rozważmy osiowy test rozciągania lub ściskania. Początkowa długość próbki wynosi  $l_0$ , zaś jej przekrój  $S_0$ . Na ogół test przeprowadzamy przy stałej prędkości odkształcenia:  $\dot{\epsilon} = const.$  Typowy wykres krzywej rozciągania (lub ściskania) przedstawia się często w tzw.

współrzędnych inżynierskich:  $\sigma = \frac{F}{A_0}$  w funkcji  $\epsilon = \frac{e}{l_0}$ , gdzie  $e = l - l_0$  ( $\sigma$  jest to tzw. inżynierskie naprężenie,  $\epsilon$  - inżynierskie wydłużenie). Typową krzywą rozciągania przedstawia Rys. 1.



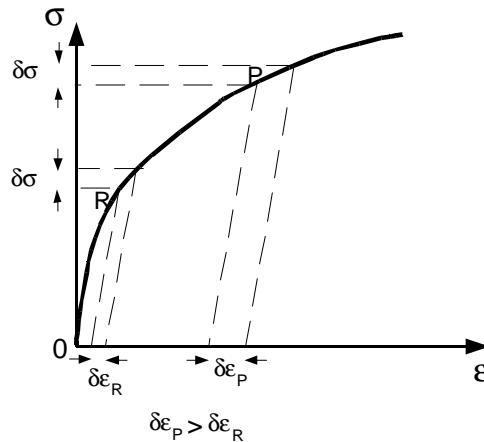
Rys. 1. Typowa krzywa rozciągania metalu.

Widzimy, że po odjęciu przyłożonej siły pozostaje trwałe odkształcenie, czyli plastyczne:  $\epsilon_{pl} = \epsilon_t - \epsilon_e$ , gdzie  $\epsilon_t$  jest odkształceniem całkowitym, zaś  $\epsilon_e$  jest odkształceniem sprężystym. Jeśli ponownie przyłożymy do próbki naprężenia, to najpierw będziemy się poruszać po prostej QP (odkształcenie sprężyste), zaś począwszy od punktu P wystąpi odkształcenie plastyczne.

Wprowadźmy umowę, że od tego momentu odkształcenie plastyczne  $\epsilon_{pl}$  oznaczać będziemy jako  $\epsilon$ .

Jeżeli, startując z punktu P, powiększymy wartość naprężeń o  $\delta\sigma$ , to przyrost odkształcenia plastycznego wyniesie  $\delta\epsilon_P$  (Rys.2). Natomiast w innym punkcie krzywej rozciągania (R), tej samej wartości przyrostu naprężeń będzie odpowiadał inny przyrost odkształcenia

plastycznego  $\delta\epsilon_R$  – Rys. 2. Widzimy zatem, że dla danej wartości przyłożonych naprężeń charakterystyczny jest tylko przyrost odkształcenia plastycznego  $\delta\epsilon$ .



Rys. 2. Po odjęciu przyłożonych naprężeń (punkt P) i ponownym ich przyłożeniu oraz powiększeniu o  $\delta\sigma$ , odkształcenie plastyczne próbki wzrośnie o  $\delta\epsilon_P$ . Podobnie, ponowne przyłożenie naprężeń w punkcie R oraz ich zwiększenie o  $\delta\sigma$ , spowoduje przyrost odkształcenia plastycznego  $\delta\epsilon_P$ . Widać, że przyrosty są będą różne i charakterystyczne dla wartości przyłożonych naprężeń.

### Kryteria płynięcia plastycznego przy ogólnym stanie naprężeń

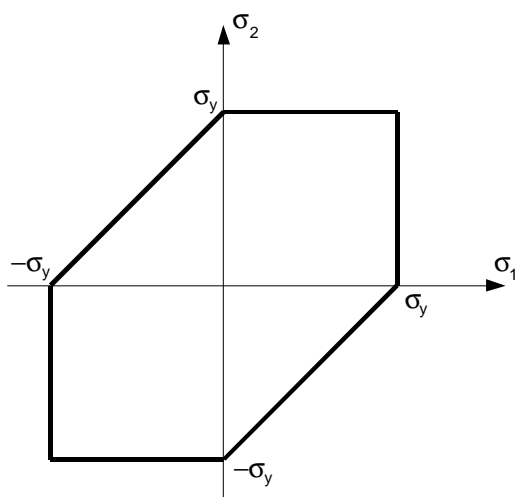
Jak już widzieliśmy, mechanizmami odkształcenia plastycznego są poślizg, bliźniakowanie i poślizg po granicach ziaren (w w wysokich temperaturach). Wszystkie te procesu są mechanizmami prostego ścinania, a zatem istotne do ich zajścia są tylko naprężenia ścinające, natomiast naprężenia hydrostatyczne nie odgrywają żadnej roli.

a) **Kryterium Treski** (org.: Tresca):

Płynięcie plastyczne pojawia się wtedy, gdy maksymalne naprężenie ścinające osiąga krytyczną wartość  $\frac{1}{2}\sigma_y$  :

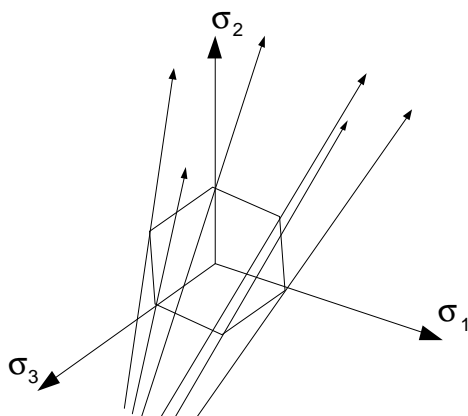
$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}\sigma_y \quad (1)$$

gdzie  $\sigma_y$  jest naprężeniem płynięcia w próbie odkształcenia osiowego (np. rozciąganie lub ściskanie) – por. Rys.1, natomiast  $\sigma_{\max}$  oraz  $\sigma_{\min}$  są największym i najmniejszym naprężeniem w układzie osi głównych (są to oczywiście składowe normalne). Kryterium to przy płaskim stanie odkształceń  $\sigma_1, \sigma_2$  (przy czym  $\sigma_3 = 0$ ) zilustrowane jest na Rys. 3. Przedstawiony sześciokąt jest miejscem geometrycznym punktów  $\sigma_1, \sigma_2$ , które spełniają kryterium Treski, czyli Równ. 1.



Rys. 3. Kryterium Treski na płaszczyźnie  $\sigma_1 \sigma_2$ .

W przypadku ogólnego stanu naprężeń, kiedy w układzie soi głównych występują trzy niezerowe składowe naprężeń ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), miejscem geometrycznym punktów spełniających Równ. 1 jest graniastosłup o podstawie sześciokąta



Rys. 4. Powierzchnia płynięcia plastycznego, wg. kryterium Treski, w przypadku ogólnego stanu naprężeń ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) są składowymi w układzie osi głównych).

#### b) Kryterium Von Mises'a

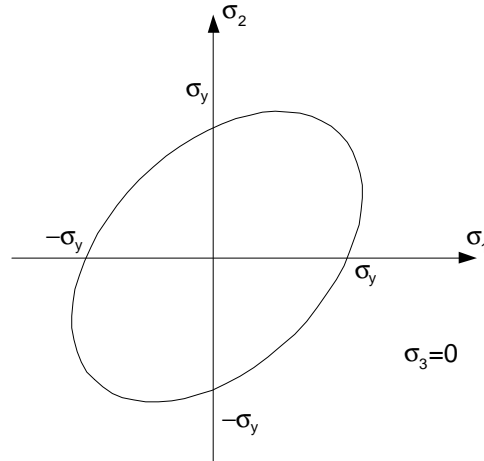
Według tego kryterium, płynięcie plastyczne zachodzi, gdy poniższa funkcja  $F$ , zależna od naprężeń głównych ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), osiąga wartość krytyczną  $\sigma_y$ :

$$F = \left[ \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} = \sigma_y \quad (2)$$

Jeśli ograniczymy się do płaskiego stanu naprężeń (obecne tylko składowe  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ ), to wykresem krzywej płynięcia plastycznego jest elipsa o równaniu:

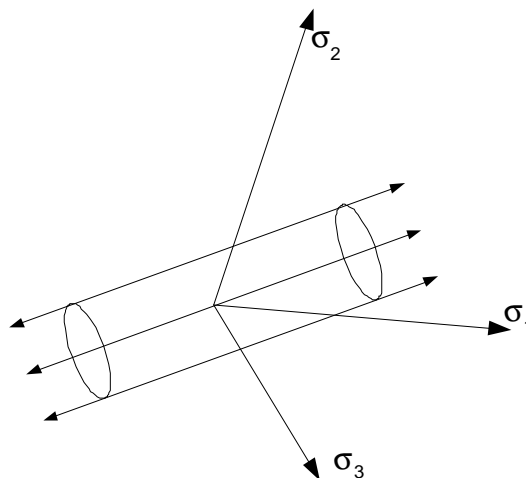
$$\sigma_y = \left[ \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

I jest ona przedstawiona na Rys. 5.



Rys. 5. Kryterium Von Mises'a na płaszczyźnie  $\sigma_1 \sigma_2$ .

W przypadku pełnego stanu naprężeń wykresem powierzchni plastyczności (Równ. 2) jest cylinder eliptyczny – Rys. 6.



Rys. 6. Powierzchnia płynięcia plastycznego, wg. kryterium Von Mises'a, w przypadku ogólnego stanu naprężeń ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) są składowymi w układzie osi głównych).

Zauważmy, że w przypadku rozciągania osiowego ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), zgodnie z Równ. 2  $\sigma_y = \sigma_1$ .

Na ogół kryterium Von Mises daje dobrą zgodność z eksperymentem, lepszą niż kryterium Treski.

## Pojęcie naprężeń efektywnych

Wróćmy do przykładu z próbką, która została poddana testowi rozciągania (Rys.1), aż do wartości naprężenia  $\sigma_p$ , po którym w próbce pozostało trwałe wydłużenie plastyczne  $\epsilon_t - \epsilon_e$ . Jeśli teraz poddawać będziemy ta próbkę na nowo obciążeniu w teście rozciągania osiowego, bądź też przy dowolnym stanie naprężeń, to płynięcie plastyczne rozpocznie się ponownie jeśli funkcja F z Równ.2 osiągnie wartość  $\sigma_p$ . Dlatego też funkcja F może być uważana za miarę efektywnych naprężeń, decydująca czy nastąpi płynięcie plastyczne. Zatem naprężenia efektywne (w układzie osi głównych) definiujemy następująco:

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Natomiast, jeśli naprężenia wyrażone są w dowolnym układzie odniesienia, to:

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{1}{2} \{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \} + 3 \{ \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Można wykazać, że wartość naprężenia efektywnego  $\bar{\sigma}$  (Równ.5) jest niezmiennikiem, tzn. nie zależy od układu odniesienia.

Przypomnijmy, że jeśli znamy wartość naprężenia  $\sigma_p$ , przy którym próbka zacznie płynąć plastycznie w teście rozciągania osiowego, to wystąpi to również przy dowolnie złożonym stanie naprężeń, jeśli tylko:  $\bar{\sigma} = \sigma_p$ . Naprężenia efektywne opisują nam zatem obiektywnie stan materiału (np., umocnienie mechaniczne wskutek wzrostu gęstości dyslokacji).

W rozdziale tym stosujemy następującą konwencję: wskaźniki tensorów w układzie osi głównych wyrażamy w sposób zredukowany i przez cyfry (np.  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ), zaś w dowolnym układzie przez litery (np.  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ).

## Relacje naprężenie - odkształcenie

W poniższych rozważaniach użyjemy następujących założeń:

- materiał jest izotropowy, a zatem osie główne tensora naprężeń i odkształceń pokrywają się,
- każdej wartości naprężenia ścinającego (oraz małowemu, ustalonymu przyrostowi  $d\bar{\sigma}$ ) odpowiada przyrost plastycznego odkształcenia ścinającego, którego wartość nie zależy od naprężeń normalnych,
- W materiale o określonym stanie początkowym, dowolnym dwóm naprężeniom ścinającym  $\tau_A$  i  $\tau_B$  odpowiadają przyrosty plastycznego odkształcenia ścinającego  $d\gamma_A$  i  $d\gamma_B$ , przy czym:

$$\frac{d\gamma_A}{\tau_A} = \frac{d\gamma_B}{\tau_B} \quad (6)$$

Podkreślić należy, iż powyższa zależność nie oznacza, iż istnieje liniowa zależność pomiędzy  $\tau_A$  i  $d\gamma_A$ .

Można zdefiniować wiele różnych ilorazów naprężeń ścinających i przyrostów plastycznego odkształcenia ścinającego odpowiadających małowemu, ustalonemu przyrostowi  $d\bar{\sigma}$ , np.:

$$\frac{d\varepsilon_{xx} - d\varepsilon_{yy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{d\varepsilon_{yy} - d\varepsilon_{zz}}{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}} = \frac{d\varepsilon_{zz} - d\varepsilon_{xx}}{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}} = \frac{d\varepsilon_{xy}}{\sigma_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{yz}}{\sigma_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{zx}}{\sigma_{zx}} = d\alpha$$

Pomnóżmy obustronnie ta relację przez dwa i zapiszmy ją w nieco uproszczonej postaci:

$$\frac{2(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2(d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)}{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}} = \frac{2(d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)}{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}} = \frac{d\gamma_{xy}}{\sigma_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{\sigma_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{\sigma_{zx}} = d\lambda \quad (7)$$

gdzie:  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} (=2\varepsilon_{12}=\varepsilon_6)$ ,

$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} (=2\varepsilon_{23}=\varepsilon_5)$ ,

$\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} (=2\varepsilon_{31}=\varepsilon_6)$

oraz  $d\lambda = 2d\alpha$

Powyższe równanie jest słuszne, gdy wszystkie składowe naprężeń przyłożone są równocześnie. Równania 7 i 8 potwierdzone są licznymi pomiarami.

Jak już wiemy, w odkształceniu plastycznym zachowana jest objętość materiału, a zatem:

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = 0 \quad (8)$$

Łącząc ze sobą dwa ostatnie równania, możemy wyrazić bezpośrednio przyrosty odkształcenia plastycznego, spowodowane równoczesnym działaniem wszystkich składowych naprężeń:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{3}d\lambda \left\{ \sigma_{xx} - \frac{1}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right\} \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{3}d\lambda \left\{ \sigma_{yy} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right\} \\ d\varepsilon_z &= \frac{1}{3}d\lambda \left\{ \sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right\} \\ d\gamma_{xy} &= \sigma_{xy} d\lambda \\ d\gamma_{yz} &= \sigma_{yz} d\lambda \\ d\gamma_{zx} &= \sigma_{zx} d\lambda \end{aligned} \quad (9)$$

Równanie to posiada dużą wartość praktyczną, gdyż daje nam „rozkład” odkształcenia plastycznego na składowe, przy czym odkształcenie to spowodowane jest dowolnie złożonym stanem naprężeń. Przyrosty odkształcenia plastycznego zależą od: aktualnego poziomu naprężeń efektywnych  $\bar{\sigma}$  oraz od małego przyrost  $d\bar{\sigma}$  ponad ten poziom, który wywołuje to odkształcenie.

Przepiszmy teraz Równ. 7 do postaci w układzie osi głównych:

$$\frac{2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{2(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{2(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)}{\sigma_3 - \sigma_1} = d\lambda \quad (10)$$

Aby przekształcić to równanie, skorzystajmy z tożsamości trygonometrycznej dotyczącej sześciu dowolnych liczb  $a, b, c, d, e, f$  spełniających następującą proporcję :

$$a/d = b/e = c/f$$

(zauważmy, że relacją ta spełniają składowe  $a, b, c$  oraz  $d, e, f$  dwóch równoległych wektorów).

Mamy zatem także:

$$a/d = b/e = c/f = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} / \sqrt{(d^2 + e^2 + f^2)} \quad (11)$$

Stosując tożsamość 11 do Równ. 10, otrzymujemy:

$$d\lambda = \frac{\sqrt{2\{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2\}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}}} \quad (12)$$

Zapiszmy powyższe równanie w sposób bardziej zwarty:

$$\frac{1}{3}d\lambda = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (13)$$

gdzie  $d\bar{\varepsilon}$  jest miarą *odkształcenia efektywnego*:

$$d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2\}} \quad (14)$$

Równanie 14 charakteryzuje w ogólny sposób dowolne odkształcenia plastyczne.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku rozciągania osiowego ( i przy spełnieniu warunku stałej objętości –Równ. 8), odkształcenie efektywne oraz naprężenia efektywne redukują się do:

$$d\bar{\varepsilon} = d\varepsilon_1 \text{ oraz } \bar{\sigma} = \sigma_1.$$

Możemy zdefiniować miarę całkowitego odkształcenia efektywnego:

$$\bar{\varepsilon} = \int d\bar{\varepsilon} \quad (15)$$

Przykładowo, w przypadku rozciągania osiowego:  $\bar{\varepsilon} = \int d\bar{\varepsilon} = \int d\varepsilon_1 = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \log_e \frac{l}{l_0}$ , gdzie  $l$  i  $l_0$

są długościami końcową i początkową próbki.

Stosując pojęcia efektywnego naprężenia i odkształcenia, wykresy  $\bar{\sigma}$  w funkcji  $\bar{\varepsilon}$ , dla tego samego materiału początkowego, będą miały niemal taki sam kształt dla różnych odkształceń plastycznych spowodowanych różnymi typami naprężeń (patrz Rys. 7 i 8). Jest to ważne uogólnienie krzywej przedstawiającej wyniki dowolnego typu odkształcenia plastycznego.

Wielkości  $\bar{\sigma}$  oraz  $\bar{\varepsilon}$  nazywane są także *równoważnymi naprężeniami i odkształceniami*.

Wykres  $\bar{\sigma}$  w funkcji  $\bar{\varepsilon}$  najłatwiej jest wyznaczyć dla danego materiału w testach osiowego rozciągania lub ściskania.

Podstawmy  $\frac{1}{3}d\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}$  (Równ. 14) do Równ. 10:

$$\begin{aligned}d\epsilon_x &= \left\{ \sigma_{xx} - \frac{1}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right\} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma} \\d\epsilon_y &= \left\{ \sigma_{yy} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right\} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma} \\d\epsilon_z &= \left\{ \sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right\} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma}\end{aligned}\tag{16}$$

Jest to równania LEVY-MISES'a, podstawowe równanie teorii plastyczności. W powyższym równaniu jest ono wyrażone w układzie osi głównych. W układzie tym przyrost całkowitego odkształcenia ( $d\bar{\epsilon}$ ) przyrost podaje nam Równ.14.

Natomiast w dowolnym układzie odniesienia przyrost efektywnego odkształcenia wyliczamy zgodnie z następującą formułą:

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} \left\{ (d\epsilon_x - d\epsilon_y)^2 + (d\epsilon_y - d\epsilon_z)^2 + (d\epsilon_z - d\epsilon_x)^2 \right\} + \frac{1}{3} \{ d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2 \}}\tag{17}$$

zaś naprężenie efektywne wyliczamy zgodnie z Równ.5, czyli:

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right\} + 3 \{ \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \} \right]^{\frac{1}{2}}$$

(zarówno  $d\bar{\epsilon}$  jak i  $\bar{\sigma}$  są niezmiennikami). Wtedy równania LEVY-MISES'a przyjmują ogólną postać:

$$\begin{aligned}d\epsilon_x &= \left\{ \sigma_{xx} - \frac{1}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right\} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma} \\d\epsilon_y &= \left\{ \sigma_{yy} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right\} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma} \\d\epsilon_z &= \left\{ \sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right\} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma} \\d\gamma_{xy} &= 3\sigma_{xy} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma} \\d\gamma_{yz} &= 3\sigma_{yz} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma} \\d\gamma_{zx} &= 3\sigma_{zx} \cdot d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma}\end{aligned}\tag{18}$$

Zauważmy, iż mając wyznaczony dla danego materiału stosunek  $d\bar{\epsilon} / \bar{\sigma}$  przy założonej małej wartości  $d\bar{\sigma}$  (np. z testu rozciągania osiowego), z równania Levy-Mises'a wyliczymy rozkład dowolnego odkształcenia plastycznego  $d\bar{\epsilon}$  na poszczególne składowe:

$d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\epsilon_z, d\gamma_{xy}, d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}$ , odpowiadający przyłożonemu naprężeniu efektywnemu  $\bar{\sigma}$ .



Jest to bardzo przydatne równanie operacyjne w obliczeniach odkształceń plastycznych, przydatne np. w projektowaniu procesów formowania materiałów.

Na koniec zauważmy, że jeśli przyłożone do materiału siły będziemy zwiększać, ale tak, aby poszczególne składowe tensora naprężeń pozostawały w stałych wzajemnych proporcjach, to równanie Levy-Mises'a można scałkować i otrzymamy całkowite (końcowe) miary składowych odkształcenia :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \bar{\varepsilon} \left\{ \sigma_{xx} - \frac{1}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right\} / \bar{\sigma} \\
 \varepsilon_y &= \bar{\varepsilon} \left\{ \sigma_{yy} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right\} / \bar{\sigma} \\
 \varepsilon_z &= \bar{\varepsilon} \left\{ \sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right\} / \bar{\sigma} \\
 \gamma_{xy} &= 3\bar{\varepsilon}\sigma_{xy} / \bar{\sigma} \\
 \gamma_{yz} &= 3\bar{\varepsilon}\sigma_{yz} / \bar{\sigma} \\
 \gamma_{zx} &= 3\bar{\varepsilon}\sigma_{zx} / \bar{\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

gdzie składowe tensora naprężeń ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ) i jego miara efektywna  $\bar{\sigma}$  odpowiadają stanowi końcowemu procesu odkształcenia oraz:

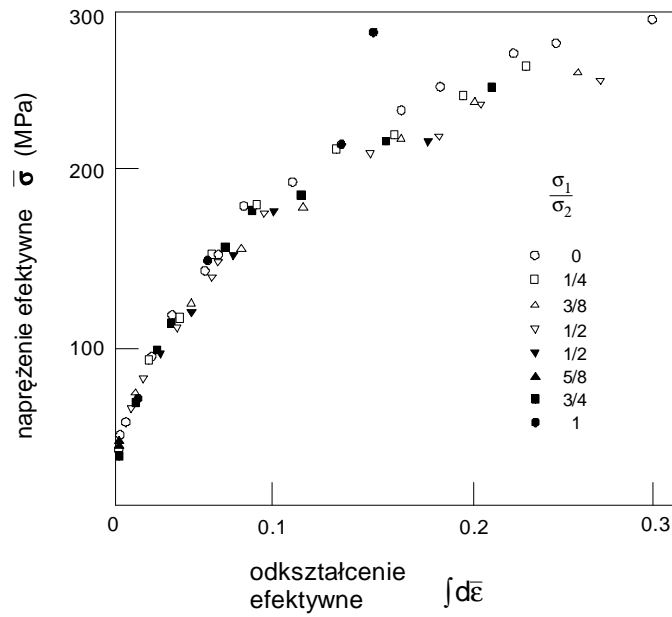
$$\bar{\varepsilon} = \int d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} \{ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 \} + \frac{1}{3} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (\text{por. Równ. 17}).$$

Równania 19 są równaniami HENCKY'ego.

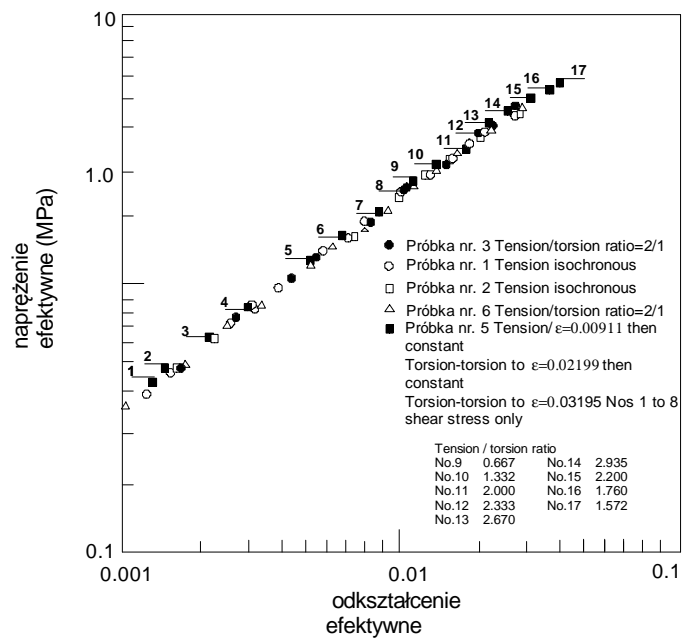
### Porównanie z wynikami doświadczalnymi

Na dwóch poniższych rysunkach (Rys. 7 i 8) pokazano zależność pomiędzy efektywnym naprężeniem i efektywnym odkształceniem dla bardzo różnych rodzajów odkształcenia. Widzimy, że jeśli wyruszymy tzw. krzywe umocnienia, czyli zależność  $\bar{\sigma}$  w funkcji  $\bar{\varepsilon}$ , to punkty odpowiadające bardzo różnym rodzajom odkształcenia układają się praktycznie na jednej krzywej, która jest bardzo zbliżona do krzywej rozciągania jednoosiowego dla danego materiału.

Przedstawione wyniki potwierdzają zalety używania wielkości efektywnych. Odkształcenia bardzo różnych typów, charakteryzowane tymi wielkościami, uzyskują zwarty i jednolity opis.



Rys. 7. Zależność pomiędzy naprężeniem i odkształceniem efektywnym dla polikrystalicznej miedzi odkształcanej przez dwuosiowy stan naprężeń ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ). Pokazano wyniki dla różnych wartości  $\sigma_1 / \sigma_2$ .



Rys. 8. Zależność pomiędzy efektywnym naprężeniem i odkształceniem dla cylindrycznych próbek polietylenu poddanych odkształceniu przez rozciąganie i skręcanie w różnych proporcjach.