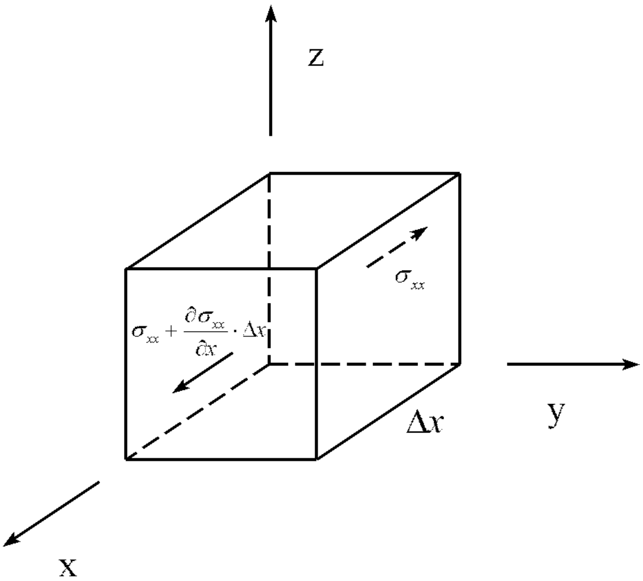
FALE SPRĘŻYSTE

Rozważmy rozchodzenie się fali sprężystej. Wyobraźmy sobie sześcian o bokach $\Delta x=\Delta y=\Delta z$ z naprężeniem σ_{xx} działającym na ścianę prostopadłą do osi x w punkcie x=0 (w rozdziale tym będziemy używać literowych, a nie liczbowych, oznaczeń współrzędnych). Naprężenie działające na ścianę przeciwległą znajdującą się w odległości Δx wynosi:



Siły działające w kierunku osi x na jednostkowy sześcian materiału (o boku $\Delta x=\Delta y=\Delta z$) pochodzące od składowej naprężeń σ_{xx}.

$$\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \Delta x \tag{1}$$

Działa ono na ścianę o powierzchni $\Delta y \Delta z$; siła wypadkowa:

$$F_x = (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x - \sigma_{xx}) \Delta y \Delta z = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \tag{2}$$

Policzmy wkład do siły F_x od dwóch pozostałych naprężeń: σ_{xy} i σ_{xz}. Przez analogię z powyższym równaniem:

$$F_x = (\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}) \Delta x \Delta y \Delta z = (\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}) \Delta V \tag{3}$$

Podobne równania można napisać na F_y i F_z.

Rozchodząca się fala wywołuje pole przemieszczeń **u**:

$$\mathbf{u}:\begin{cases} u_x(x,y,z) \\ u_y(x,y,z) \\ u_z(x,y,z) \end{cases}$$

Z II prawa dynamiki:

$$\begin{aligned} F_x &= m\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ F_x &= \rho\Delta V\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie przemieszczenie sześcianu w kierunku osi x wynosi u_x; podstawiając Równ. 3:

$$\begin{gathered} \rho\Delta V\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)\Delta V \\ \Downarrow \\ \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} \end{gathered} \tag{5}$$

Jest to równanie ruchu naszego sześcianiki w kierunku x. Podobne równania otrzymamy dla ruchu w kierunku y i z.

Jak już wspomniano, w paragrafie tym zachowamy dla przejrzystości literowe wskaźniki tensora naprężeń i odkształceń. I tak, np., $\sigma_{xy} = \sigma_{12}$ oznacza σ_6; podobnie $2\varepsilon_{xy}=\varepsilon_6$. A zatem, zgodnie z konwencją zapisu zredukowanego, mamy:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Zgodnie z powyższym, prawo Hooke’a dla kryształu o symetrii sześciennej przyjmie następującą postać:

$$
\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & & 0 & \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & 0 & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{6}
$$

Zatem:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{12}\varepsilon_{zz} \\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = C_{11}\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + C_{12}\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} + C_{12}\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \\
\sigma_{xy} = 2C_{44}\,\varepsilon_{xy} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 2C_{44}\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 2C_{44}\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z}
\end{gathered} \tag{7}
$$

Tak więc równanie (5) przybierze postać:

$$
\rho\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = C_{11}\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + C_{12}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x}\right) + 2C_{44}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z}\right) \tag{8}
$$

lecz $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$; podobnie:

podobnie:

$$
\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)
$$

$$
\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)
$$

oraz:

$$
\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}
$$

$$
\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}
$$

$$
\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}
$$

Podstawmy to do Równ.8:

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = C_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + C_{12}(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}) + C_{44}(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}) \quad (9)$$

Inaczej:

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = C_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + C_{44}(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}) + (C_{12} + C_{44})(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z})} \quad (10)$$

Analogicznie, przemieszczenia wzdłuż osi y i z wynoszą:

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = C_{11}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + C_{44}(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}) + (C_{12} + C_{44})(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial z})} \quad (11)$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = C_{11}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + C_{44}(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}) + (C_{12} + C_{44})(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z})} \quad (12)$$

Równ.10-12 są kompletnym układem równań opisującym rozchodzenie się fali sprężystej w ośrodku trój-wymiarowym. Są to trzy równania różniczkowe cząstkowe, drugiego stopnia, sprzężone. Stałe sprężyste są tu współczynnikami.

Rozważmy teraz rozwiązania uzyskanych równań fali w dwóch szczególnych przypadkach:

a) Fala w kierunku [100]= **x**. Jednym z możliwych rozwiązań jest klasyczna fala podłużna:

$$u_x = u_{x0}\exp[i(kx - \omega t)] \quad (14)$$

gdzie: $k = \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{k} \parallel \mathbf{x})$ jest wektorem falowym, zaś $\omega = 2\pi f$ jest częstością kołową przenoszonych przez falę drgań (f jest częstotliwością). W tym szczególnym rozwiązaniu: $u_y = u_z = 0$

Wstawiając powyższe rozwiązanie do Równ. 10, otrzymujemy:

$\rho\omega^2 = C_{11}k^2$; a zatem prędkość fali podłużnej w kierunku [100]:

$$v_{podl} = f\,\lambda = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$$

Zapamiętajmy, zatem:

$$v_{podl} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \tag{15}$$

b) Rozważmy teraz falę poprzeczną, lub falę ścinania o wektorze falowym $\mathbf{k} \parallel \mathbf{x}$, wywołującą przemieszczenia $u_y \parallel$ **y**. Proponowana forma rozwiązania:

$$u_y = u_{y0} \exp[i(kx - \omega t)] \tag{16}$$

gdzie równocześnie: $u_x = u_z = 0$.

Po podstawieniu powyższego rozwiązania do Rów.11 otrzymujemy: $\rho\omega^2 = C_{44}k^2$. A zatem prędkość fali poprzecznej, rozchodzącej się w kierunku [100] wynosi:

$$v_{pop} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \tag{17}$$

Identyczną prędkość otrzymujemy dla przemieszczeń u_z gdy $\mathbf{k} \parallel \mathbf{x}$. A zatem dla $\mathbf{k} \parallel [100]$ mamy dwie niezależne fale ścinania o tych samych prędkościach.

Nie jest to jednak prawdziwe w ogólnym przypadku, gdy **k** ma dowolny kierunek. Dotąd w uzyskanych przez nas wyrażeniach na prędkość fali wystąpiły stałe sprężyste C_{11} i C_{44}. W przypadku, gdybyśmy rozpatrzyli ruch np. w kierunku [110], w wyrażeniach na prędkość wystąpiłaby również stała C_{12}, co więcej otrzymalibyśmy różne prędkości dla dwóch fal poprzecznych.

Ogólnie, w krysztale sześciennym istnieją trzy niezależne sposoby wzbudzania fal sprężystych w danym kierunku: jednej podłużnej i dwóch poprzecznych.