

## Ćwiczenie 61

# Drgania elektromagnetyczne obwodu LCR

### *Cel ćwiczenia*

Obserwacja drgań tłumionych i przebiegów aperiodycznych w obwodzie LCR. Pomiar i interpretacja parametrów opisujących obserwowane przebiegi napięcia  $U(t)$ .

### *Wprowadzenie*

Zjawisko drgań elektromagnetycznych w obwodzie złożonym z indukcyjności  $L$  i pojemności  $C$  jest szczegółowo opisane w podręcznikach. Zachowanie obwodu  $LC$  opisuje równanie różniczkowe

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \quad (1)$$

gdzie  $q$  jest zależnym od czasu  $t$  ładunkiem kondensatora. Jego rozwiązanie

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2)$$

opisuje niegasnące drgania elektromagnetyczne o częstotliwości  $\omega_0$  drgań równej

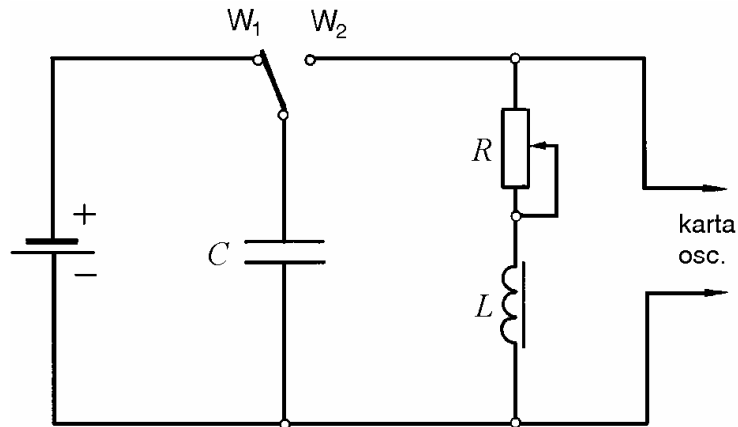
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3)$$

W rzeczywistych obwodach uwzględnić trzeba wpływ rezystancji  $R$ , wynikającej np. ze skończonej rezystancji uzwojeń cewki. Zachowanie obwodu, nazywanego obwodem  $LCR$ , opisuje równanie różniczkowe

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (4a)$$

wynikające z II prawa Kirchhoffa. Trzy składniki równania (4) określają wartości napięć na indukcyjności  $L$ , rezystancji  $R$  i pojemności  $C$  obwodu.

Rysunek 1 przedstawia obwód umożliwiający ilościową obserwację zjawiska. W położeniu przełącznika pokazanym na rysunku następuje naładowanie kondensatora do napięcia  $U_0$ . Po przełączeniu przełącznika w położenie  $W_2$  kondensator zostaje połączony z cewką, co powoduje rozpoczęcie drgań elektromagnetycznych w obwodzie LCR.



Rys. 1. Obwód LCR

Mierzone (przy użyciu komputera z kartą) napięcie  $U(t)$  jest napięciem na kondensatorze. Napięcie to jest proporcjonalne do ładunku  $q(t)$ , zgodnie z równaniem  $U(t) = q(t)/C$ . Zatem równanie (4a) przepisać można dla funkcji  $U(t)$  w postaci

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U(t) = 0. \quad (4b)$$

Ze względu na różnorodność zastosowań równanie typu (4a, b) jest jednym z najważniejszych równań różniczkowych. Opisuje tak swobodne drgania elektromagnetyczne jak i analogiczne drgania w układach mechanicznych\*. Nawet, jeżeli nie jest omówione w wykładzie fizyki, stanowi standardowy temat kursu analizy matematycznej. Jest równaniem różniczkowym *zwykłym, drugiego stopnia, liniowym, jednorodnym, o stałych współczynnikach*. Definicje i twierdzenia dotyczące każdej z wymienionych cech równania (4) – jak również metody jego rozwiązania – są omawiane w podręcznikach matematyki\*\*. Tutaj przedstawimy gotowe rozwiązania dopasowane do warunków początkowych, które wynikają z faktu, że w chwili  $t = 0$  załączenia wyłącznika napięcie kondensatora  $U = U_0$ , zaś prąd  $i = dq/dt$  w obwodzie jest równy zero.

Wygodnie jest wprowadzić krytyczny opór równy

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (5)$$

gdyż typ rozwiązania zależy od tego, czy rezystancja obwodu jest mniejsza, równa, lub większa od wartości krytycznej  $R_c$ .

\* Odpowiednikami  $L$ ,  $1/C$  i  $R$  są: masa, stała sprężystości i stała tłumienia. Por. ćwiczenie 4.

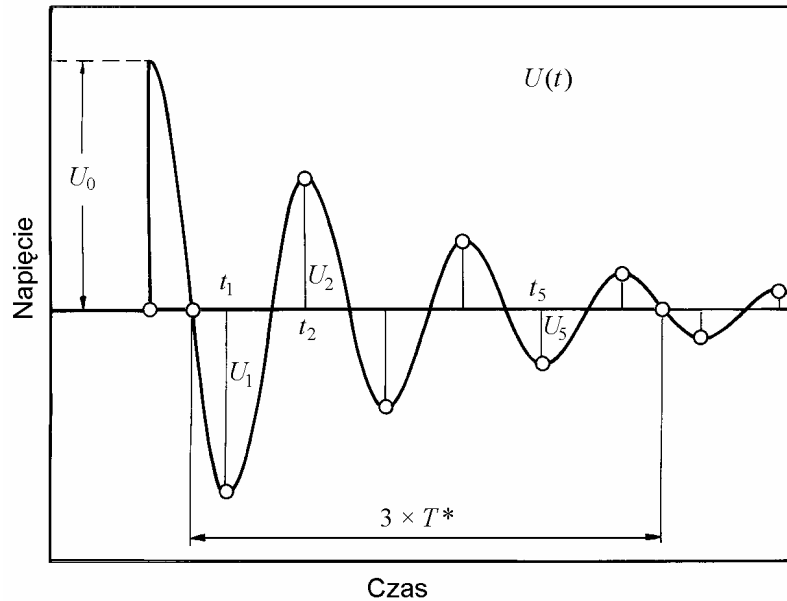
\*\* Patrz np: Żakowski W., Leksiński W.: *Matematyka. Część IV*. Warszawa, WNT 1995.

$R < R_c$ : drgania tłumione

Dla oporności obwodu mniejszej od  $R_c$  zależność napięcia kondensatora od czasu

$$U(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \quad (6)$$

jest iloczynem kosinusoidy (jak dla drgań niegasnących) i funkcji wykładniczej  $e^{-\beta t}$  opisującej zanik drgań z upływem czasu (rys. 2).



**Rys. 2.** Zależność  $U(t)$  dla drgań tłumionych. Pokazano punkty, których współrzędne należy odczytać w celu wyznaczenia częstości i współczynnika tłumienia

Stałą  $\beta$  nazywamy współczynnikiem tłumienia, odwrotność  $1/\beta$  jest czasem, w którym amplituda maleje  $e = 2,71\dots$  razy. Stałe  $\beta$  i  $\omega$  są zależne od parametrów  $L$ ,  $C$  i  $R$  obwodu,

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (7)$$

Wzór (7) wskazuje, że częstość drgań tłumionych  $\omega$  jest nieco mniejsza od częstości drgań nietłumionych  $\omega_0$ . Wartości fazy  $\delta$  oraz stałej  $A$  w równaniu (6) dla zadanych warunków początkowych są równe

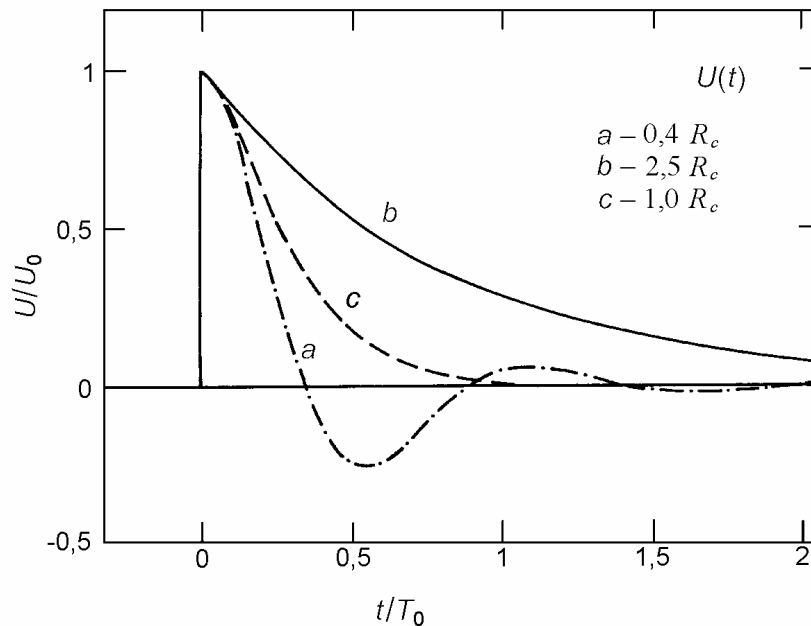
$$\delta = -\arctg \frac{\beta}{\omega}, \quad A = \frac{U_0}{\cos \delta}. \quad (8)$$

$R = R_c$ : przebieg aperiodyczny krytyczny

Dla krytycznej wartości oporu  $R = R_c = 2\sqrt{L/C}$  rozwiązaniem spełniającym nasze warunki początkowe jest funkcja

$$U(t) = U_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}, \quad (9)$$

pokazana jako krzywa  $c$  na rysunku 3. Porównanie przebiegów na rysunku 3 pokazuje, że dla  $R = R_c$  funkcja  $U(t)$  najszybciej maleje do zera. Gdy zależy nam na szybkim tłumieniu drgań (np. samochodu) dobierać trzeba stałą tłumienia (tłumik w zawieszeniu samochodu) tak, by uzyskać ruch zbliżony do aperiodycznego krytycznego.



**Rys. 3.** Porównanie przebiegów  $U(t)$  dla:  $a$  – drgań tłumionych,  $b$  – przebiegu aperiodycznego,  $c$  – przebiegu aperiodycznego krytycznego

$R > R_c$ : przebieg aperiodyczny

W tym przypadku rozwiązanie jest sumą dwu funkcji wykładniczych

$$U(t) = U_0 \left[ \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 t} - \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_1 t} \right]. \quad (10)$$

Stałe  $\beta_1$  i  $\beta_2$  oznaczają dwie różne stałe tłumienia, równe

$$\beta_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0}, \quad \beta_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0}, \quad (11)$$

wartości  $\omega_0$  i  $\beta$  definiują wzory (3) i (7). Dominujący wpływ we wzorze (10) ma składnik pierwszy, gdyż zarówno ma większą amplitudę  $U_0\beta_1 / (\beta_1 - \beta_2)$  niż drugi, jak również wolniej maleje do zera.

W granicy  $R/R_c \rightarrow \infty$  drugi składnik w równaniu (10) dąży do zera, zaś składnik pierwszy można przybliżyć funkcją

$$U(t) = U_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC. \quad (12)$$

Uzyskane rozwiązanie, to nic innego jak zależność napięcia od czasu dla zjawiska rozładowania kondensatora  $C$  przez opór  $R$ . Przy dużej wartości oporu obwodu wpływ indukcyjności  $L$  staje się nieistotny.

### Eksperyment

Pomiar rozpoczyna się od naładowania kondensatora z baterijki do napięcia  $U_0$  (przełącznik w położeniu  $W_1$ ). Drgania gasnące lub przebiegi aperiodyczne powstają po przełączeniu przełącznika w położenie  $W_2$ . Przebieg napięcia  $U(t)$  rejestrujemy za pomocą komputera wyposażonego w kartę oscyloskopową (opis w podrozdz. 2.5). W zastosowanym schemacie połączeń napięcie kondensatora jest mierzone dopiero po zadziałaniu przełącznika. Skok mierzonego napięcia od zera do  $U_0$  wyznacza początek przebiegu  $t = 0$ .

Występująca w opisie teoretycznym rezystancja  $R$  obwodu jest sumą regulowanej opornicy dekadowej i stałej oporności uzwojeń cewki.

Czas załączania przełącznika mechanicznego jest rzędu milisekundy. Wynikające stąd zakłócenia są widoczne na początku mierzonego przebiegu  $U(t)$ . Należy dążyć do tego, by okres drgań elektromagnetycznych był znacznie większy od czasu załączania przełącznika. Skutecznym sposobem jest zastosowanie cewki z ferrytowym rdzeniem kubkowym, w którym linie sił pola całkowicie zamykają się w objętości rdzenia ferrytowego. Dzięki wysokiej wartości przenikalności magnetycznej rdzenia  $\mu$ , rzędu kilkaset, tyleż razy powiększona jest indukcyjność cewki – bez zwiększania jej oporności. Względna „powolność” tak wygenerowanych drgań elektromagnetycznych umożliwia zarówno użycie przełącznika mechanicznego, jak i ręczne wyzwolenie komputerowej akwizycji danych.

### Aparatura

Zestaw 2 kondensatorów, cewka w ferrytowym rdzeniu kubkowym, opornica dekadowa 100 k $\Omega$ , przełącznik, ogniwo 1,2 V. Przyrządem pomiarowym jest komputer z kartą oscyloskopową. Wartości pojemności kondensatorów oraz indukcyjności i oporności cewki są podane.

### Wykonanie ćwiczenia

1. Zestawić układ pomiarowy wg schematu (rys. 1).
2. Uruchomić komputer z kartą oscyloskopową, wybrać czas rejestracji 819,2 ms.
3. Sprawdzić jakościowo działanie układu. W celu zarejestrowania przebiegu naładować kondensator, a następnie wyzwolić komputerową rejestrację napięcia i w ułamek sekundy później przełączyć przełącznik. Zapoznać się z działaniem kursora i lupy czasowej.
4. Drgania tłumione.
  - a) Nastawić dodatkowy opór równy zeru, względnie zmontować układ bez opornicy. Tłumienie jest wynikiem niezerowej oporności uzwojeń cewki.
  - b) Po zarejestrowaniu przebiegu wykonać jego szkicowy rysunek. W razie potrzeby rozciągnąć obraz  $U(t)$  przy użyciu lupy czasowej.

c) W celu wyznaczenie częstości  $\omega$  zmierzyć, z wykorzystaniem kursora, interwał czasu odpowiadający jednemu lub (lepiej) kilku „okresom”  $T^*$  (rys. 2). (Symbol  $T^*$  stosujemy, by zwrócić uwagę, że funkcja  $U(t)$  dla drgań gasnących nie jest funkcją okresową, a odległość  $T^*$  między odpowiednimi miejscami zerowymi nie jest okresem. Niemniej pozostaje prawdziwy związek:  $\omega = 2\pi/T^*$ ). Pomiar wykonać dwukrotnie – dla różnych par miejsc zerowych funkcji  $U(t)$ .

d) Dla wyznaczenia współczynnika tłumienia  $\beta$  odczytać przy użyciu kursora współrzędne (napięcie  $U_i$  i czas  $t_i$ ) dla kolejnych maksimów i minimów przebiegu (rys. 2).

5. Przebieg aperiodyczny krytyczny.

a) Obliczyć krytyczną wartość  $R_C = 2\sqrt{L/C}$ . Ustawić opornicę dekadową tak, by całkowity opór obwodu (cewka + opornica) był równy  $R_C$ .

b) Dla odtworzenia kształtu przebiegu (jak też przebiegów aperiodycznych,  $R_C > R_C$ ) odczytać współrzędne  $U, t$  zarejestrowanej krzywej w kilkunastu punktach.

6. Przebieg aperiodyczny: jak pkt 5, dla oporu  $R > R_C$ .

7. Inne pomiary lub obserwacje jakościowe (w miarę wolnego czasu i decyzji prowadzącego):

- zmiana kształtu drgań tłumionych ze wzrostem oporności obwodu,
- zmiana częstotliwości drgań przy zmianie pojemności kondensatora,
- rozładowanie kondensatora przez opór (z cewką usuniętą z obwodu),
- badanie szybkości działania użytego przełącznika mechanicznego (badać początek dowolnego przebiegu, maksymalnie rozciągnięty przy użyciu lupy czasowej).

### Opracowanie wyników

1. Drgania tłumione.

- Obliczyć częstość drgań  $\omega$ .
- Wykonać wykres zależności logarytmu napięcia w kolejnych ekstremach od czasu,  $\ln|U_i| = f(t_i)$ . Wykres ten, jak i analogiczne wykresy dla przebiegów aperiodycznych najwygodniej wykonać przy użyciu papieru półlogarymicznego.
- Wyznaczyć wartość współczynnika tłumienia  $\beta$  jako nachylenie prostej dopasowanej do punktów wykresu (metodą graficzną lub najmniejszych kwadratów).

2. Przebiegi aperiodyczne.

- Wykonać wykresy  $\ln U = f(t)$  dla przebiegów aperiodycznych, jak w pkt 1b.
- Przebieg aperiodyczny ( $R > R_C$ ) jest sumą 2 malejących funkcji wykładniczych (wzór (11)), przy czym składnik z mniejszą wartością  $\beta$  (czyli większą stałą czasową) zanika wolniej. Na wykresie  $\ln U = f(t)$  uzyskujemy linię prostą z wyjątkiem czasów bliskich początkowi przebiegu. Nachylenie prostej jest równe  $-\beta_2$ .
- Przebieg aperiodyczny krytyczny opisuje funkcja (10) będąca iloczynem funkcji wykładniczej i czynnika  $(1 + \beta t)$ . Zatem wykres  $\ln U = f(t)$  nie przybiera postaci linii prostej. Dla porównania doświadczenia z teorią wykonać na tym samym wykresie krzywą teoretyczną.

3. Wyznaczone wartości  $\omega, \beta$  i  $\beta_2$  zestawić w tabeli i porównać z wartościami obliczonymi na podstawie parametrów  $L, C$  i  $R$  obwodu.