

Ćwiczenie 31

Modelowanie pola elektrostatycznego

Cel ćwiczenia

Poznanie podstawowych wielkości opisujących pole elektrostatyczne. Wyznaczenie powierzchni ekwipotencjalnych i wektorów natężenia pola elektrycznego na płaszczyźnie dla różnych konfiguracji elektrod.

Wprowadzenie

Pole elektrostatyczne wytwarzają w przestrzeni nieruchome ładunki elektryczne. Znalezienie rozkładu pola przy zadanej konfiguracji ładunków polega na określeniu w każdym punkcie przestrzeni funkcji opisujących jego natężenie $\mathbf{E}(x, y, z)$ i potencjał skalarny $V(x, y, z)$. Jest to wykonalne albo na drodze matematycznej przez rozwiązanie podstawowych równań elektrostatyki, np. Gaussa, Laplace'a czy Poissona, albo na drodze doświadczalnej.

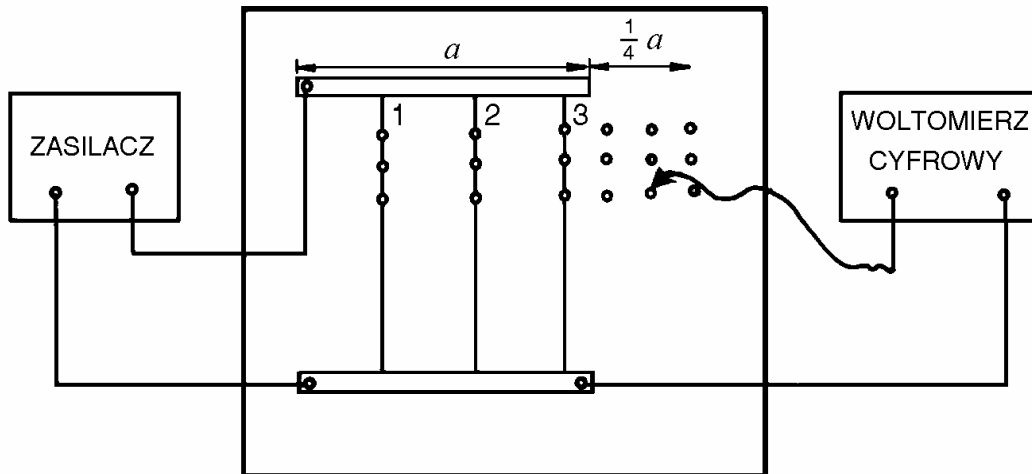
Rozwiązanie analityczne tych równań jest możliwe tylko dla najprostszych konfiguracji ładunków. W innych przypadkach korzystamy z przybliżenia numerycznego lub stosujemy metody doświadczalne. Bezpośredni pomiar pola elektrycznego jest trudny ponieważ wprowadzona w badane pole sonda silnie je zakłóca. Metody doświadczalne polegają na modelowaniu analogowym, czyli zastąpieniu pola elektrostatycznego polem innego rodzaju, o identycznej postaci funkcji, które je opisują, ale łatwiejszym do pomiaru. Dobrym modelem pola elektrostatycznego w przestrzeni bez ładunków może być pole elektryczne stacjonarnego przepływu prądu w obszarze o stałej oporności właściwej. Można wykazać iż potencjały skalarnie $V(x, y, z)$ obu tych pól spełniają *równanie Laplace'a*

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Zakładając identyczne warunki brzegowe otrzymuje się w obu przypadkach jako rozwiązanie powierzchnie ekwipotencjalne $V(x, y, z) = \text{const.}$ o takim samym kształcie.

Doświadczalne metody rozwiązywania równania Laplace'a wykorzystują: siatki oporowe, wanny elektrolityczne, papier lub płyty przewodzące, powłoki gumowe. Wymienione metody pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie potencjału w określonych punktach pola. Wartości potencjału wyznacza się przez pomiar napięcia woltomierzem o dużej oporności właściwej w węzłach siatki płaskiej (rys. 1). Przy odpowiednim zagęszczeniu punktów pomiarowych daje się wyznaczyć przebieg linii ekwipotencjalnych, a na ich podstawie obliczyć wartość natężenia pola oraz przebieg linii sił. Dzięki podobieństwom geometrycznym modele mogą być wykonywane w dowolnej skali.

Pomiar potencjału w węzłach kwadratowej siatki wykonujemy woltomierzem cyfrowym



Rys. 1. Obwód elektryczny do badania pola w kondensatorze płaskim

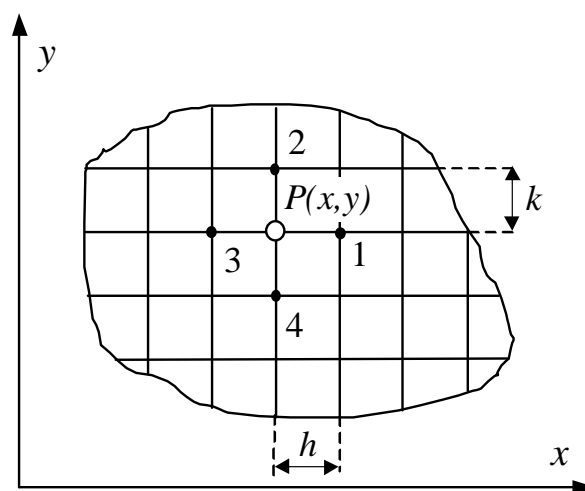
Numeryczne obliczenie natężenia pola \mathbf{E}

Przybliżoną wartość natężenia pola \mathbf{E} uzyskujemy obliczając numerycznie gradient potencjału

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} \quad (2)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{V(x, y+k) - V(x, y)}{k} \quad (3)$$

gdzie: h i k są krokami siatki. Zwykle przyjmujemy $h = k$.



Rys.1. Pomiar potencjału w węzłach siatki dwuwymiarowej

Pole elektryczne kondensatora płaskiego

Kondensator płaski jest najprostszym do analizy rodzajem kondensatora. Wewnątrz kondensatora (linie 1, 2, 3) pole elektryczne jest jednorodne, o wartości

$$E = \frac{U}{d}. \quad (4)$$

Potencjał $V(x)$ rośnie liniowo od zera dla elektrody uziemionej, do wartości równej napięciu zasilacza U ,

$$V(x) = \frac{U}{d} x. \quad (5)$$

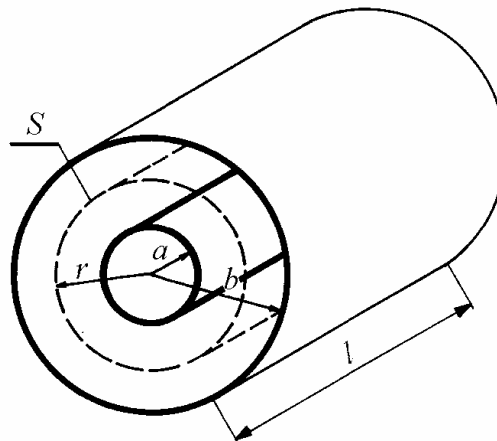
Natomiast na zewnątrz elektrod mamy niejednorodne pole rozproszone. W eksperymencie badamy zarówno pole jednorodne w środku kondensatora (wzdłuż trzech równoległych linii, rys. 1), jak i pole rozproszone.

Pole elektryczne kondensatora cylindrycznego

Przykładem takiego kondensatora jest kabel koncentryczny oraz gazowe detektory promieniowania. Stanowi on bardzo prostą konfigurację ładunków, dla której łatwo można znaleźć rozkład pola elektrostatycznego zarówno na drodze analitycznej jak i doświadczalnie.

Rys. 2 przedstawia kondensator cylindryczny, którego geometrię określają:

- długość l
- promień wewnętrzny r_w ,
- promień zewnętrzny r_z .



Rys. 3. Kondensator cylindryczny

Obliczenie potencjału V i natężenia pola E jest przedstawione w podręcznikach. Przy założeniu, że potencjał elektrody zewnętrznej jest równy zero wartość potencjału w punkcie odległym o r od osi kondensatora określa wzór

$$V(r) = \frac{U}{\ln(r_z/r_w)} \ln(r/r_z). \quad (6)$$

Przez analityczne obliczenie pochodnej z wzoru funkcyjnego (6) otrzymujemy natężenie pola

$$E(r) = -\frac{U}{r \ln(r_z/r_w)}. \quad (7)$$

Zauważmy, że rozkłady pola elektrycznego $E(r)$ oraz potencjału $V(r)$ nie zależą od długości kondensatora l . Mogą więc być zbadane na płaskim modelu w postaci dwu pierścieni mosiężnych.