

Ćwiczenie 9

Swobodne spadanie

Cel ćwiczenia

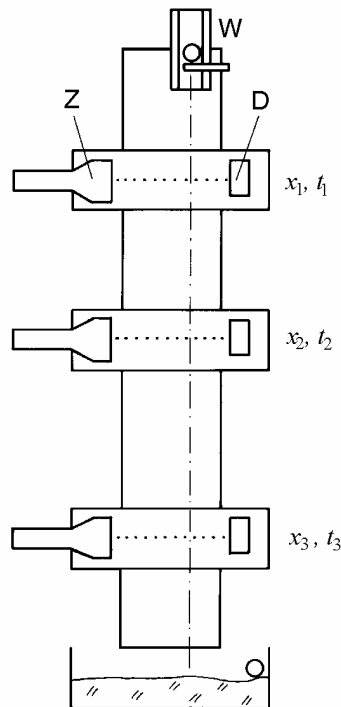
Obserwacja swobodnego spadania przy użyciu elektronicznej rejestracji czasu przelotu kuli przez punkty pomiarowe. Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego.

Wprowadzenie

Przez ruch swobodny rozumiemy ruch, w którym, oprócz grawitacji, nie działają na ciało żadne inne siły. Nazwa „swobodne spadanie” zarezerwowana jest dla ruchu swobodnego w dół wzdłuż prostej pionowej. Na odległościach małych w porównaniu z rozmiarami Ziemi swobodne spadanie jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, ze stałym przyspieszeniem g niezależnym od rodzaju ciała.

Z codziennego doświadczenia wiemy, że swobodne spadanie jest zjawiskiem szybkim w ludzkiej skali czasu. W czasach Galileusza i Newtona ilościowy pomiar czasu w zjawisku swobodnego spadania był niemożliwy. W naszym eksperymencie problem ten rozwiązano dzięki zastosowaniu elektronicznego pomiaru czasu.

Rysunek 1 przedstawia układ pomiarowy. Spadające ciało jest kulą spadającą wzdłuż pionowej łąty.



Rys. 1. Schemat mechaniczny układu pomiarowego: Z – źródło światła (reflektorek), D – detektor światła (fotodioda), W – wyrzutnik kul

Na łacie w trzech miejscach o współrzędnych x_1 , x_2 i x_3 znajdują się trzy fotokomórki umożliwiające pomiar trzech odpowiadających czasów t_1 , t_2 i t_3 . Dla każdego z trzech punktów pomiarowych możemy zapisać równanie ruchu jednostajnie przyspieszonego

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + v_0 t_1 + g \frac{t_1^2}{2} \\x_2 &= x_0 + v_0 t_2 + g \frac{t_2^2}{2} . \\x_3 &= x_0 + v_0 t_3 + g \frac{t_3^2}{2}\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie v_0 oraz x_0 oznaczają prędkość początkową oraz położenie początkowe.

Formuły (1) tworzą układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi x_0 , v_0 i a . Rozwiązanie układu równań umożliwia wyznaczenie przyspieszenia, z jakim porusza się kulka z wzoru

$$a = \frac{2}{t_3 - t_1} \left(\frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right).\tag{2}$$

Eliminacja wpływu oporu powietrza

Ruch kulki jest spadaniem prawdziwie swobodnym, jeżeli eksperyment wykonamy w próżni. Wykonując eksperyment w powietrzu uzyskamy wartości przyspieszenia kulki a nieco mniejsze od przyspieszenia ziemskiego g . Dlatego, że oprócz dominującej siły grawitacji, na kulę działają, przeciwnie skierowane siły wyporu Archimedesesa i oporu powietrza. Wypadkową siłę F działającą na kulę zapiszemy w postaci wzoru

$$F = \rho V g - \rho_p V g - C A \frac{\rho_p v^2}{2}.\tag{3}$$

Pierwszy jego składnik $\rho V g$ oznacza siłę grawitacji mg , przy czym masa spadającego ciała jest przedstawiona jako iloczyn objętości V i gęstości ρ .

Składnik $\rho_p V g$ jest siłą wyporu Archimedesesa, symbol ρ_p oznacza gęstość ośrodka (dla powietrza $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$).

Trzeci składnik określa siłę oporu powietrza. W warunkach naszego eksperymentu opływ powietrza wokół kuli ma charakter turbulentny, z siłą oporu w przybliżeniu proporcjonalną do kwadratu prędkości ruchu v . Ponadto siła oporu jest proporcjonalna do gęstości ośrodka ρ_p , pola przekroju poprzecznego A i współczynnika oporu C zależnego od kształtu ciała (dla kuli $C \approx 0,5$).

Zgodnie z II zasadą dynamiki przyspieszenie działające na ciało wynosi

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\rho V g + \rho_p V g - C A \frac{\rho_p v^2}{2}}{\rho V}.\tag{4}$$

Po podstawieniu wzorów na objętość i pole przekroju poprzecznego kuli ($V = (4/3)\pi r^3$, $A = \pi r^2$) i wykonaniu przekształceń algebraicznych otrzymujemy

$$a = g - \text{const} \frac{1}{\rho}, \quad (5)$$

gdzie const oznacza stałą równą

$$\text{const} = g\rho_p + \frac{3}{8} \frac{C\rho_p v^2}{r} \quad (6)$$

Uzyskany rezultat jest przybliżeniem dlatego, że prędkość v i, w konsekwencji, siła oporu nie jest stała w czasie, zatem ruch kulki w powietrzu tylko w przybliżeniu pozostaje ruchem jednostajnie przybliżonym*.

Równanie (5) jest jednak wystarczająco dokładne do interpretacji naszego eksperymentu. Jest równaniem prostej $y = ax + b$, jeżeli zmienną x przyjąć $1/\rho$, a za zmienną y pozorną wartość przyspieszenia ziemskiego a . Sugeruje to metodę eliminacji czynników zakłócających pomiar przyspieszenia ziemskiego. Eksperyment wykonamy przy użyciu kul o tym samym promieniu r , ale wykonanych z materiałów o różnej gęstości ρ (np. Pb, Fe, mosiądz, Al, plastik, drzewo). Ze zmierzonych współrzędnych x_1, x_2, x_3 i czasów t_1, t_2, t_3 obliczamy – dla każdej kulki z osobna – przyspieszenie a . Następnie wykonujemy wykres zależności a w funkcji $1/\rho$ i dopasowujemy do niego prostą. Składnik stały równania prostej określa wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Tabela 1
Zależność przyspieszenia ziemskiego
od szerokości geograficznej Φ

Φ [°]	g [m/s ²]
0	9,780
40	9,802
50	9,811
60	9,819
90	9,832

Realizacja pomiaru czasu

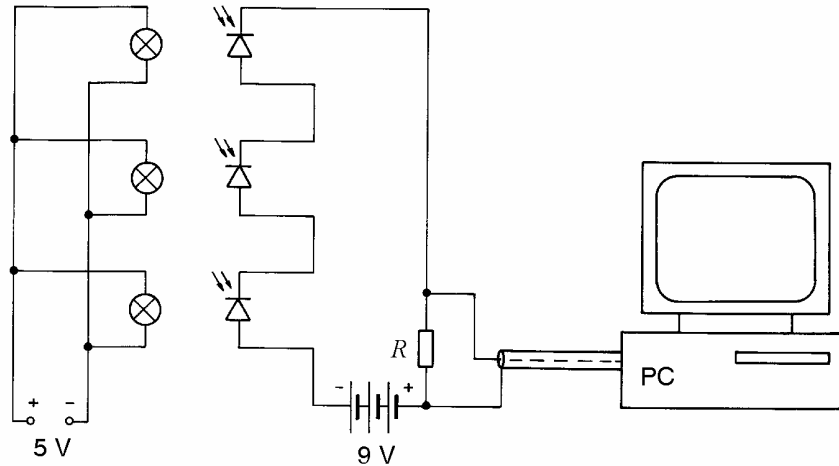
Rysunek 2 pokazuje schemat elektryczny układu pomiarowego. Każda z trzech fotokomórek składa się ze źródła światła (reflektorka lub lasera) oraz fotodiody – elementu półprzewodnikowego spełniającego rolę detektora. Trzy fotodiody połączone szeregowo są

* Dokładnym rozwiązaniem równania ruchu (4), dla warunków początkowych $x_0 = 0$ i $v_0 = 0$, jest funkcja:

$$x(t) = g' \tau^2 \ln \cosh \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{\rho r}{C \rho_p g'}}, \quad g' = g(1 - \rho_p / \rho).$$

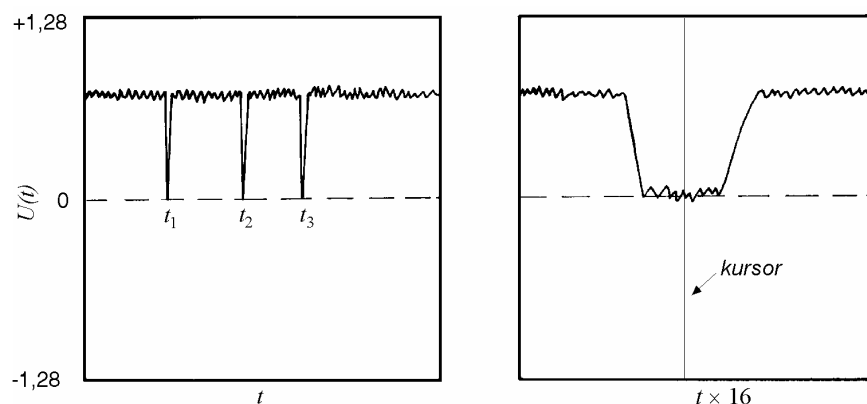
Stać τ jest charakterystycznym czasem określającym rodzaj ruchu: dla $t < \tau$ zbliżony do jednostajnie przyspieszonego, dla $t > \tau$ przechodzący w ruch jednostajny.

normalnie oświetlone, przepływa przez nie określony prąd tworzony przez elektrony wyzwolone w objętości czynnej fotodiod przez fotony światła. Przerwanie strumienia światła przez przelatującą kulę powoduje przerwanie generacji nośników prądu w jednej z fotodiod i w konsekwencji zmniejszenie prądu płynącego przez obwód do wartości bliskiej zeru. Zgodnie z prawem Ohma powoduje to proporcjonalne zmniejszenie napięcia na oporze R połączonym szeregowo z układem fotodiod.



Rys. 2. Schemat połączeń elektrycznych dla źródeł i detektorów światła

Przebieg napięcia na oporze R rejestrowany jest przy użyciu komputera z kartą oscyloskopową. Opis działania karty przedstawiono w podrozdziale 2.5. Krótko mówiąc, kartę uważać można za szybki woltomierz, który w zadanym krótkim czasie wykonuje tysiące pojedynczych pomiarów napięcia, zapamiętuje rezultaty i wyświetla je w formie krzywej $U(t)$ na monitorze komputera. Na sygnale napięciowym $U(t)$ (rys. 3) widzimy trzy skierowane w dół piki związane z przelotem kulki przez kolejne fotokomórki. Szerokość kolejnych pików maleje gdyż prędkość kulki rośnie.



Rys. 3. Zarejestrowany przebieg $U(t)$ (lewa strona) oraz określenie czasów (t_1 , t_2 lub t_3) na wykresie z rozciągniętą skalą czasu (prawa strona)